Entre la matemática y la magia: la leyenda de Josefo y la mezcla australiana

Pedro Alegría Ezquerra

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología,Universidad del País Vasco UPV/EHU, Apartado 644, 48080-Bilbao. España. pedro.alegria@ehu.es

[Recibido en enero de 2012, aceptado en abril de 2012]

Muchos son los nexos de unión entre la matemática y la magia: por una parte, de forma usual se vienen utilizando principios matemáticos para idear juegos de magia y, en sentido inverso, diversas técnicas específicas de la magia pueden dar lugar a modelos matemáticos cuyas propiedades tienen gran interés en la matemática recreativa. En este trabajo mostramos dicha dualidad relacionando el famoso problema de Josefo y sus variantes con unas mezclas específicas de cartas utilizadas en algunos juegos de magia con cartas. Para ilustrar el carácter educativo de este problema, sugerimos también algunas actividades didácticas para desarrollar en un aula de clase.

Palabras clave: Problema de Josefo; Mezcla australiana; Mezcla Monge; Matemática recreativa.

Between mathematics and magic: Josephus legend and the down-under shuffle

There are many links between mathematics and magic: on the one hand, it is usual to see how mathematical principles apply in order to create magic tricks and, on the other hand, several specific techniques in magic give rise to mathematical models providing interesting properties in recreational mathematics. In this work we show this duality relating the famous Josephus problem and its variants with specific card shuffles used in some card tricks. In order to display the educational nature of this problem, we also suggest some teaching activities to develop in a classroom.

Keywords: Josephus problem; Down-under shuffle; Monge shuffle; Recreational Mathematics.

Introducción: la leyenda de Josefo

Empezaremos planteando el siguiente problema, que es clásico en matemática recreativa:

> El emperador de un remoto país del pasado tenía una costumbre que él consideraba ingeniosa pero la mayoría de ciudadanos temía. Resulta que el emperador invitaba a comer cada domingo a cierto número de sus súbditos. Los colocaba en una mesa redonda y, entonces, iba recorriendo en círculo por detrás de los comensales y, una persona sí y una persona no, volcaba una cucharada de harina sobre sus cabezas, hasta que sólo quedara un invitado sin manchas. Quien resultara agraciado, recibía un lingote de oro.
>
> Si resultaras invitado un día y no sabes de antemano cuántos invitados habrá, ¿sabrías encontrar una fórmula para determinar el lugar que debes ocupar si quieres ser el ganador del premio?

Este problema, con un planteamiento similar pero con desenlace más trágico, corresponde a la leyenda, cuyo protagonista es el historiador judío, ilustrado en la figura 1, Flavio Josefo (*ca.* 37-95), autor del libro *De bello judaico* (*La guerra de los judíos*). Según esta leyenda, Josefo sobrevivió a la rebelión judía contra el imperio romano de Nerón, gracias a que encontró a tiempo la fórmula que pide el problema anterior.

Una de las versiones de la escena que ha llegado a nuestros días, narrada por él mismo en tercera persona en el capítulo 8 del tercer libro del citado *La guerra de los judíos*, es la siguiente:

> Durante la insurrección judía que tuvo lugar en Galilea contra la dominación romana en los años 66 y 67 d.C., Josefo y otros 40 compañeros judíos se encontraron acorralados en una cueva, después de que los romanos hubieran capturado la ciudad de Jotapat. Para evitar ser atrapados y convertidos en esclavos, los cautivos prefirieron la muerte y decidieron que

formarían un círculo, matándose entre ellos mediante el siguiente ritual: el primero mataba al segundo y pasaba el arma al tercero, quien mataba al siguiente, y así sucesivamente, hasta que quedara uno solo, quien se suicidaría. Josefo sentía que tenía otra misión en la vida y rápidamente calculó el lugar que ocuparía el último superviviente, se colocó en dicho lugar y convenció al penúltimo superviviente que se entregaran para escapar a la muerte. Al ser conducido ante Flavio Vespasiano, justificó su acción apelando a la misión que tenía de comunicar un mensaje divino: "Vespasiano sería pronto emperador". Una vez cumplido el vaticinio, Josefo fue liberado y llevado a Roma, desde donde realizó su labor de historiador.

Figura 1. Grabado de Flavio Josefo, como aparece en la traducción de sus obras por William Whiston.

En algunos lugares de internet se puede encontrar información más completa sobre la veracidad de esta historia (WEB1). Parece que fue Girolamo Cardano (1539) el primero que puso el nombre de Josefo para recrear el problema de determinar el último elemento que queda después de un proceso de eliminación como el descrito. Durante los siglos XV y XVI eran muy comunes este tipo de problemas; el más popular es el llamado problema de los cristianos y los turcos, descrito de la siguiente forma:

> A bordo de una embarcación a la deriva se encontraban 15 turcos y 15 cristianos. Era necesario sacrificar y echar al mar a la mitad de los pasajeros para aligerar el barco y que el resto pudiera sobrevivir. Con el fin de elegir "aleatoriamente" quiénes serían los sacrificados, se colocarían en un círculo y, a partir de una determinada persona, se contaría hasta ocho y se sacrificaría a la novena persona, repitiendo el proceso hasta que quedaran quince. El problema consiste en colocar a los cristianos para que todos ellos se salvaran.

Una regla mnemotécnica que permite saber el orden preciso es la siguiente: "Con su hermanita Carmen venía Elena", y fijarse únicamente en las vocales o-u-e-a-i-a-a-e-e-i-a-e-e-a, asociando a cada una de ellas los valores numéricos a=1, e=2, i=3, o=4, u=5. De este modo, el orden sería o=4 cristianos, u=5 turcos, e=2 cristianos, y así sucesivamente.

La historia del problema de los cristianos y los turcos ha sido estudiada con profundidad por Wilhem Ahrens (1901). Este problema aparece en varios libros de aritmética y bajo diferentes versiones: cristianos y judíos, estudiantes y granujas, hijos e hijastros, etc., con diferentes cantidades y diferentes valores de eliminación. También era conocido por los árabes y se ha encontrado alguna referencia en escritos japoneses del siglo XII e, incluso, irlandeses del siglo IX (Murphy 1942). Incluso, hoy en día, todos recordamos algún juego de niños donde se selecciona o elimina a alguien colocando en círculo a un grupo y realizando algún tipo de conteo. El niño con alguna destreza matemática sabrá colocarse en el lugar adecuado para ser el elegido o librarse de la eliminación.

En este artículo mostraremos la riqueza didáctica que ofrece este tipo de problemas, tanto desde el punto de vista matemático como de su aplicación en los juegos de magia con cartas que están basados en las propiedades de estos problemas. Desarrollamos también algunas generalizaciones del problema de Josefo y una interesante variación de la mezcla de cartas que este problema sugiere. De esta manera, pretendemos que el problema sea accesible a diversos niveles educativos, pues a nivel elemental se pueden captar las propiedades de una permutación con una baraja de cartas y a nivel superior se puede profundizar en las fórmulas de recurrencia y las técnicas para deducirlas.

En este sentido, dedicamos la penúltima sección a sugerir algunas actividades didácticas basadas en este problema, cuyo objetivo es introducir al estudiante en los conceptos de recurrencia, sistemas de numeración y aritmética modular.

Las matemáticas del problema: fórmulas de recurrencia

En esta sección vamos a resolver el problema planteado con la leyenda de Josefo y determinar algunas propiedades del proceso de eliminación que surge con dicho problema.

Nada menos que Leonhard Euler (1776) examinó algunos aspectos del problema y planteó fórmulas de recurrencia para encontrar el último sobreviviente. Es un interesante ejercicio utilizar algún lenguaje de programación para obtener la respuesta a este problema y plantear posibles generalizaciones. De hecho el problema de Josefo se utiliza como modelo para introducir los procesos recursivos en computación. Seguiremos aquí los pasos mostrados por Graham, Knuth y Patashnik (1989). Por otra parte, en varios portales de internet podemos encontrar versiones interactivas del juego (WEB2, WEB3, WEB4). Con ellas podemos establecer conjeturas sobre distintas variantes del juego y comprobarlas visualmente.

Fórmulas de recurrencia

Si denotamos por $J(n)$ la posición del último superviviente del juego de Josefo cuando hay n elementos, la siguiente tabla nos da los valores de $J(n)$ correspondientes a los primeros números naturales.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$J(n)$	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$J(n)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

Algunas propiedades de esta sucesión son las siguientes:

(1) $J(2n) = 2J(n)-1,\ n \geq 1$.

Es evidente que, si empezamos con $2n$ elementos, después de eliminar todos los números pares, quedan n elementos que podemos renumerar sumando uno y dividiendo por 2.

(2) $J(5\cdot 2^m) = 2^{m+1}+1,\ m \geq 0$.

Basta aplicar sucesivas veces la propiedad anterior y tener en cuenta que $J(5) = 3$.

(3) $J(2n+1) = 2J(n) + 1,\ n \geq 1$.

Al haber un número impar de elementos, después de eliminar los n números pares, eliminamos el número 1 y el proceso vuelve a empezar a partir del número 3, de modo que podemos renumerar los demás elementos restando uno y dividiendo por 2.

(4) $J(2n+1) = J(2n) + 2,\ n \geq 1$.

Basta restar las igualdades (1) y (3).

Fórmulas explícitas

Las fórmulas anteriores permiten calcular el valor de $J(n)$ conocido el valor de $J(n-1)$. Describimos una fórmula que no involucre los valores anteriores en la siguiente propiedad.

(5) $J(2^m+k) = 2k+1$, si $m\geq 0$ y $0\leq k<2^m$.

Se puede probar fácilmente que, si el número de personas es 2^m, la primera de ellas será la última en eliminarse. Basta observar que, en la primera fase, se eliminan todas las personas que ocupan un lugar par. Al renumerar las restantes, se obtiene un grupo con 2^{m-1} personas a las que se puede aplicar el mismo proceso anterior, siempre empezando por la persona que ocupa el lugar número uno. Cuando sólo quedan dos personas, es evidente que se elimina la que ocupa el número dos y queda la primera.

Una sencilla variación de este argumento permite demostrar que, si se trata de un grupo de 2^m+k personas, eliminamos en primer lugar las colocadas en las posiciones 2, 4, ..., $2k$, para llegar a un grupo con 2^m personas y ahora la primera de ellas es la que ocupaba inicialmente el lugar $2k+1$.

Otra expresión, más compacta, de la misma fórmula es la siguiente:

$J(n) = 2\cdot(n-2^k)+1$, donde 2^k es la mayor potencia de 2 menor o igual que n.

Esta fórmula equivale a su vez a la siguiente, expresada como función de una variable:

$J(n)=2\cdot(n-2^{[\log_2 n]})+1$, donde $[z]$ es la parte entera de z (el mayor entero que es menor o igual a z).

(6) El argumento anterior permite utilizar de forma ingeniosa la aritmética binaria para deducir cuál será el último elemento (Graham *et al.* 1989). Para ello se escribe en el sistema de numeración binaria el número de elementos del conjunto y se pasa la primera cifra de la izquierda (que es siempre un 1) a la derecha.

Para comprobarlo, sea $n = 2^m + k$; si

$$k=a_{m-1}\cdot 2^{m-1}+a_{m-2}\cdot 2^{m-2}+\ldots+a_1\cdot 2+a_0=(a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0)_2 ,$$

entonces $n=(1a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0)_2$. Por otra parte,

$$2k=a_{m-1}\cdot 2^m+a_{m-2}\cdot 2^{m-1}+\ldots+a_1\cdot 2^2+a_0\cdot 2=(a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0 0)_2$$

y $2k+1=(a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0 1)_2$. Así pues,

$$J(1a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0)_2=(a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1 a_0 1)_2 .$$

Se observa que las expresiones binarias de n y $J(n)$ sólo se diferencian en que la primera cifra de n es la cifra de las unidades de $J(n)$.

Por ejemplo, en el caso planteado en la introducción, con los 41 judíos acorralados, la posición ocupada por Flavio Josefo para escapar con vida del suicidio colectivo se calcula de la misma manera: como $(41)_{10}=(101001)_2$, al pasar la primera cifra al final, tenemos $(010011)_2=(19)_{10}$.

Algunas consecuencias de esta propiedad son las siguientes.

(7) $J(2^m-1)=2^m-1$, $m \geq 0$.

Esto es evidente porque $n=(11\ldots1)_2$.

En general, $J(J(\ldots(J(n))\ldots))=2^{p(n)}-1$, donde $p(n)$ es el número de unos que tiene n en su representación binaria y J se compone consigo misma un número determinado de veces.

(8) $J(n)=n/2$ cuando $n=2^m+k$ con m impar y $k=(2^m-1)/3$.

Basta aplicar la propiedad 5).

Los primeros valores de n que verifican esta propiedad son n=2, 10, 42 y 170. La representación binaria de todos ellos tiene las cifras 1 y 0 alternadas, para que el efecto producido al pasar la primera cifra a la derecha sea el mismo que pasar la última cifra a la izquierda.

La magia del problema: la mezcla australiana

El método de eliminación que se genera en el problema de Josefo puede aplicarse también para reordenar todos los elementos del conjunto según el orden en que se van eliminando. Tenemos así una permutación del conjunto y, como tal, interesantes propiedades matemáticas que podemos estudiar.

Con una baraja de cartas se llama mezcla australiana al proceso de repartir las cartas siguiendo el esquema indicado por el problema de Josefo (el nombre se debe a que, en inglés, esta mezcla se denomina DOWN-UNDER y todo el mundo sabe que Australia está en las Antípodas). Por ejemplo, si separamos las cartas del as al 10 de un mismo palo de la baraja y las ordenamos de menor a mayor (con el as en la parte superior), al realizar repetidamente el proceso

- la carta superior a la parte inferior

- la siguiente carta sobre la mesa

hasta que todas las cartas formen un paquete sobre la mesa, el orden es ahora

5 – 9 – AS – 7 – 3 – 10 – 8 – 6 – 4 – 2.

Utilizando la notación matemática, esta permutación se expresa como

$$(3\ \ 10\ \ 5\ \ 9\ \ 1\ \ 8\ \ 4\ \ 7\ \ 2\ \ 6) = (1\ \ 3\ \ 5)(2\ \ 10\ \ 6\ \ 8\ \ 7\ \ 4\ \ 9),$$

donde los sucesivos valores indican la nueva posición que ocupa cada elemento del conjunto inicial (el as ocupa la tercera posición, el dos pasa a la décima, el tres a la quinta y así sucesivamente). El segundo miembro de la igualdad corresponde al producto de ciclos obtenidos en la permutación, es decir los sucesivos recorridos de cada elemento para volver a su posición inicial (así, el as pasa a la tercera posición, luego a la quinta y vuelve a su lugar de origen después de tres mezclas). Con esta notación sabemos que los elementos 1, 3 y 5 tienen orden tres (necesitan tres mezclas para volver a su posición de origen) y el resto tiene orden siete (con siete mezclas vuelven todos a su posición de origen). Esto indica que el orden de la permutación es 21 (precisamente el mínimo común múltiplo del orden de cada elemento). Por tanto, hacen falta 21 mezclas australianas para que todas las cartas vuelvan a su posición inicial. Si nos detenemos en la mezcla número 20, ya tenemos un juego de magia.

> Si se colocan las 10 cartas en el orden
>
> 3 – 10 – 5 – 9 – AS – 8 – 4 – 7 – 2 – 6
>
> y se realiza una mezcla australiana, primera carta debajo, siguiente sobre la mesa, siguiente debajo, siguiente sobre la mesa, hasta repartir todas las cartas, al recoger las cartas de la mesa, se observa que ¡están todas ordenadas!

Los magos han utilizado la mezcla australiana en multitud de juegos de magia para simular poderes adivinatorios, aunque la mayoría de las veces sin comprender su funcionamiento. Al conocer las propiedades matemáticas del proceso, podemos realizar efectos más ingeniosos y sorprendentes. Según reporta Martin Gardner (1969), fue el mago canadiense Mel Stover el primero en utilizar el sistema binario para determinar la última carta que se repartirá al utilizar la mezcla australiana y Bob Hummer el primero en publicar, en 1939, un juego de magia para explotar esta propiedad. Describimos a continuación la presentación del juego de Mel Stover ideada por John Scarne.

Predicción cartomágica

El mago escribe una predicción en una hoja de papel, pide a un espectador que nombre un número, digamos entre 10 y 30, y reparte sobre la mesa tantas cartas como el número elegido. Mezcla dichas cartas y entrega el paquete al espectador para que realice las siguientes operaciones:

1) Colocar la carta superior en la parte inferior del paquete.

2) Retirar la siguiente carta.

3) Repetir los pasos 1) y 2) hasta que sólo quede una carta en el paquete.

El mago muestra ahora el contenido de la predicción y confirma que coincide con la única carta que ha quedado en el proceso de eliminación.

Como ya hemos comprobado, a pesar del aparente desorden de las cartas después de esta mezcla, es posible determinar desde el principio cuál será la última carta que quede en la mano. El método más sencillo, y que puede realizarse mentalmente, es el indicado en la propiedad (5) de la sección anterior:

Se mira la carta superior de la baraja. Si n es el número de cartas elegido por el espectador, se calcula el doble de la diferencia entre n y la mayor potencia de dos que sea menor que n. A continuación se calcula la diferencia entre n y el valor obtenido. Basta pasar de arriba abajo tantas cartas como indica este último número para que el paquete esté preparado.

Por ejemplo, si $n=25$, entonces $2\cdot(25-16)=18$. La diferencia $25-18=7$ indica el número de cartas que han de pasarse de arriba abajo para que la carta superior (ya conocida) quede en el lugar idóneo para aparecer al final del proceso. En este caso, la carta ocupará el lugar 19 desde la parte superior.

La ventaja de este método es que el juego puede repetirse con grupos de distinto número de cartas. Por ejemplo, para paquetes con un número de cartas igual a una potencia de dos, la carta final será siempre la carta superior de la baraja.

Mostraremos otro efecto mágico que permite encontrar tres cartas perdidas en la baraja y que puede hacerse incluso a través del teléfono.

Por teléfono

El mago pide a su interlocutor que elija tres cartas de una baraja francesa y que, con el resto, forme tres montones sobre la mesa (caras abajo). De izquierda a derecha: montón A con 10 cartas, montón B con 15 cartas y montón C con 15 cartas. Quedarán en la mano nueve cartas.

A continuación, le indica que realice las siguientes operaciones:

- Dejar la primera carta elegida sobre el montón A y taparla con algunas cartas de B.
- Dejar la segunda carta elegida sobre el montón B y taparla con algunas del montón C.
- Dejar la tercera carta elegida sobre el montón C y taparla con las nueve restantes.
- Reunir de nuevo los montones, colocando el B sobre el A y el C sobre el resto. A continuación pasar cuatro cartas de arriba abajo.
- Hacer dos montones sobre la mesa repartiendo sucesivamente una carta cara arriba (en un montón) y una carta cara abajo (en otro montón), una carta cara arriba (en el primer montón) y una carta cara abajo (en el segundo montón) hasta que se acaben las cartas. Ninguna de las elegidas está cara arriba.
- Repetir el proceso de eliminación con el montón de cartas cara abajo. Nuevamente ninguna de las elegidas está cara arriba.
- Repetir el mismo proceso hasta que sólo quedan tres cartas cara abajo. Al volverlas resultan las tres elegidas.

Otros juegos basados en el mismo principio pueden encontrarse, por ejemplo, en (Mulcahy 2005, Alegría 2008).

Una variación común de la mezcla australiana consiste en invertir el orden de los pasos, es decir empezar dejando sobre la mesa la primera carta, pasar abajo la siguiente, y así sucesivamente (en inglés es la mezcla UNDER-DOWN). En este caso, la última carta repartida será la que ocupa el lugar igual al doble de la diferencia entre el número total de cartas y la mayor potencia de dos que sea menor que dicho número.

Generalización del problema de Josefo

Según las fuentes que se consulten, el problema de Josefo se plantea de forma diferente: en unos casos, se trata de eliminar cada tercer elemento del círculo, en otros se cuenta otro número diferente de elementos antes de eliminar al siguiente. Incluso algunos autores plantean que Josefo calculó el lugar que debían ocupar los dos últimos supervivientes. Un planteamiento general del problema de Josefo, con su correspondiente aplicación a las mezclas de cartas, es el siguiente:

> Se colocan n personas, numeradas del 1 al n, en un círculo. Empezando por el número 1 se cuentan m personas y se elimina la persona que ocupa el siguiente lugar, a la vez que el círculo se estrecha. Se vuelven a contar m personas y se elimina la persona que se encuentra a continuación de dicho número. Después de realizar el proceso n–1 veces, sólo queda una persona. ¿Qué lugar ocupaba inicialmente dicha persona?

Con una baraja, el proceso general consiste en pasar m cartas de arriba abajo, extraer la siguiente, volver a pasar m cartas de arriba abajo, extraer la siguiente, y así sucesivamente. Conocida la fórmula que da la posición de la última carta, ésta puede predecirse con anterioridad a la mezcla.

Así, el caso m=1 se reduce al estudiado en la sección 1. En el caso m=2, si n=8, se van eliminando sucesivamente los lugares 3-6-1-5-2-8-4 y queda en último lugar el número 7.

El caso general fue resuelto por primera vez por Peter Tait (1900). La regla general que estableció es la siguiente: "Si se colocan n personas en un círculo en el que se van eliminando cada m personas y p es la posición que ocupa la última persona en eliminarse, cuando hay n+1 personas, la posición que ocupa la última persona en eliminarse es p+m. Si p+m es mayor que n+1, la posición sería p+m–n–1."

Así pues, si denotamos por $J_m(n)$ al último elemento eliminado en el proceso, el algoritmo descrito por Tait viene dado por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$J_m(1)=1,\ J_m(n)=1+\operatorname{mod}(J_m(n-1)+m, n), n>1 ,$$

donde mod(a, b) representa el resto de la división de a entre b.

Una fórmula explícita para el caso m=2 ha sido obtenida por Odlyzko y Wilf (1991). Fórmulas similares permiten encontrar el siguiente elemento que quedará eliminado después de eliminar los k primeros (Thériault 2000).

El problema puede generalizarse en otra dirección: se colocan n personas en un círculo, se cuenta una persona y se eliminan las k siguientes, se cuenta la siguiente y se eliminan las k siguientes, y así sucesivamente. Determinar el valor del último elemento eliminado, que denotaremos por $J_n(k)$.

En esta situación, dicho elemento se puede calcular utilizando aritmética en base k+1, de forma similar a la estudiada en la sección 2. Por ejemplo, si k=2,

$J_n(2)=\frac{3}{2}(n-2\cdot 3^m)+1$, donde m es el mayor entero que verifica $2\cdot 3^m \leq n$ y n es par;

$J_n(2)=\frac{3}{2}(n-3^m)+1$, donde m es el mayor entero que verifica $3^m \leq n$ y n es impar.

Variantes de la mezcla australiana: la mezcla Monge

Una interesante variante de la mezcla australiana es la llamada mezcla Monge, así bautizada en honor del matemático francés Gaspard Monge, que estudió sus propiedades en (Monge 1773). La mezcla se realiza de la forma siguiente:

• Con el paquete de cartas en la mano izquierda, se empuja la carta superior y se pasa a la mano derecha.

• A continuación, la nueva carta superior del paquete de la mano izquierda se empuja y se coloca sobre la carta de la mano derecha.

• Se vuelve a empujar la carta superior del paquete de la mano izquierda y se coloca bajo las cartas de la mano derecha.

• Se repite el proceso, sucesivamente una carta encima del paquete, una carta debajo, hasta acabar el paquete de la mano izquierda.

Es fácil deducir que el resultado de la mezcla puede anticiparse antes de realizarla si se conocen las propiedades de la misma.

- Si utilizamos un número par de cartas ordenadas {1, 2, 3, ..., 2*n*}, al final de la mezcla se habrán separado las cartas pares de las impares, quedando en el orden {2*n*, 2*n*–2, ..., 2, 1, 3, ..., 2*n*–1}.

- Si utilizamos una cantidad impar de cartas {1, 2, 3, ..., 2*n*, 2*n*+1}, al final de la mezcla quedarán en el orden {2*n*, 2*n*–2, ..., 2, 1, 3, ..., 2*n*–1, 2*n*+1}.

Observemos que, con un número impar de cartas, el resultado final coincide con el que se obtiene con una carta menos y la última carta no cambia su posición después de la mezcla. Esto significa que podemos limitar nuestro estudio a un número par de cartas.

Hay una fórmula sencilla que determina la posición de cualquier carta después de una mezcla Monge. Dada una baraja con $2p$ cartas, si una carta ocupa inicialmente la posición x_0, después de una mezcla Monge ocupará la posición x_1 dada por la fórmula:

$$2x_1=2p+x_0+1 \text{ , si } x_0 \text{ es impar;}$$

$$2x_1=2p-x_0+2 \text{ , si } x_0 \text{ es par.}$$

Aplicando sucesivamente estas fórmulas, después de m mezclas Monge la carta que ocupa inicialmente la posición x_0 ocupará la posición x_m, como indica Maurice Kraitchik (1942), según la fórmula

$$2^{m+1}x_m=(4p+1)(2^{m-1}\pm 2^{m-2}\pm\ldots\pm 2\pm 1)\pm 2x_0\pm 2^m\pm 1 \text{ ,}$$

(donde se suma o resta dependiendo de la paridad de los valores x_0, x_1, ..., x_m–1).

Tras un número determinado de mezclas, todas las cartas vuelven a su posición inicial. Dependiendo del número total de cartas que se mezclen, se necesitarán más o menos mezclas. Los mejores resultados se consiguen con potencias de dos: si el número de cartas es 2*n*, bastan *n*+1 mezclas para reordenar el paquete. Por otro lado, los peores resultados se obtienen con un número de cartas igual a 2^n–2, donde hacen falta tantas mezclas como cartas para recuperar el orden inicial.

Por ejemplo, mezclas sucesivas en un paquete de seis cartas conducen a las siguientes permutaciones:

(1 2 3 4 5 6), (6 4 2 1 3 5), (5 1 4 6 2 3),

(3 6 1 5 4 2), (2 5 6 3 1 4), (4 3 5 2 6 1),

(1 2 3 4 5 6),

lo que indica que son necesarias seis mezclas Monge para volver al orden inicial de las cartas.

Un trabajo más reciente (Ledet 2006) describe el grupo de permutaciones generado por dos mezclas Monge en una baraja cuyo número de cartas es una potencia de dos.

Recordando que el periodo de una permutación es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disjuntos que la forman, podemos formar la tabla donde se describen los periodos y la descomposición cíclica del grupo de permutaciones que origina la mezcla Monge para distintos valores del número de cartas (lo que corresponde al número de mezclas necesarias para volver todas las cartas a su posición inicial) así como los puntos fijos (elementos que permanecen siempre en su misma posición).

$2p$	periodo	descomposición cíclica	puntos fijos
2	2	(1 2)	-
4	3	(1 3 4) (2)	2
6	6	(1 4 2 3 5 6)	4
8	4	(1 5 7 8) (2 4 5 6)	-
10	6	(1 6 3 7 9 10) (2 5 8) (4)	4
12	10	(1 7 10 2 6 4 5 9 11 12) (3 8)	-
16	5	(1 9 13 15 16) (2 8 5 11 14) (3 10 4 7 12)	6
52	12	… (11 32)	18

La fórmula general para el orden del grupo es la siguiente:

$$O_{2p} = \text{mín}\,\{m : 2^m + 1 \ \text{ó}\ 2^m - 1 \ \text{es múltiplo de}\ 4p+1\}\ .$$

En particular, si $2p=2^n$, $O_{2p}=n+1$, y si $2p=2^n-2$, entonces $O_{2p}=2_p$.

Como ya hemos indicado, cuando el número de cartas es impar, la última carta es un punto fijo de la permutación. En algunos casos, hay otros puntos fijos. Veamos cuáles pueden ser dichos puntos para conjuntos pares de cartas:

- Si x es impar, será punto fijo cuando $2x=2p+x+1$, es decir $x=2p+1$, lo cual es imposible porque x es menor o igual que $2p$. Esto significa que ninguna carta en posición impar es invariante.

- Si x es par, será punto fijo si $2x = 2p-x+2$, es decir $3x=2p+2$. Esto ocurrirá cuando $2p = 3k +1$, en cuyo caso $x=k+1$.

Algunos casos contienen también transposiciones, es decir cartas que intercambian su lugar después de una mezcla Monge. Veamos cuáles son dichas cartas:

- Con $6k+4$ cartas, la carta que ocupa la posición $2k+2$ quedará en el mismo lugar después de la mezcla.

- Con $10h+2$ cartas, las cartas de lugar $2h+1$ y $6h+2$ intercambian su posición después de la mezcla. Por ejemplo, con la baraja de 52 cartas, queda fija la decimoctava y se intercambian la undécima con la trigésima segunda.

Describiremos a continuación un juego en el que se utiliza la mezcla Monge para ilustrar un problema de ingenio muy popular, descrito en Tahan (1975).

La herencia

Es bastante conocido el problema clásico del sultán que deja en herencia todos sus camellos a sus tres hijos: el primero debe recibir la mitad, el segundo la tercera parte y el hijo menor la novena parte de sus camellos. En el momento de la muerte del sultán había 17 camellos, cantidad que no era divisible por dos, por tres ni por nueve. Al pedir la ayuda de un mago, éste ofreció regalarles su propio camello para que pudieran realizar el reparto. De este modo, el mayor recibió nueve camellos (la mitad de 18), el siguiente recibió 6 camellos y el menor de los hermanos dos camellos. Como todavía sobraba uno, el mago recuperó su propio camello.

Vamos ahora a recrear esta historia con las cartas. Para simplificarlo, se utilizan sólo siete cartas que representan los camellos. En este caso, el hijo mayor debe recibir la mitad, el siguiente la cuarta parte, y el hijo menor la octava parte.

Se reparten sobre la mesa, caras abajo, siete cartas y se coloca encima de ellas, también cara abajo, un comodín, que representará el camello prestado por el mago.

Al contar las cartas en voz alta se realiza una mezcla Monge.

A continuación, se extraen del paquete la segunda, cuarta, sexta y octava cartas, que representarán la parte de herencia del hijo mayor. Del paquete restante se extraen la segunda y cuarta cartas: la herencia del hijo mediano. Por último, se extrae la primera carta: la herencia del hijo menor. La carta restante será para el mago. Se muestra dicha carta y se comprueba que es precisamente el comodín.

Consideraciones didácticas

Con muchos de los resultados aquí expuestos es fácil diseñar actividades didácticas para realizar en un aula de clase. En esta sección ofrecemos algunas ideas que pueden desarrollarse con más detalle según el nivel y el grado de dedicación de cada grupo. En (Hopkins 2009) se puede encontrar algunas de estas actividades, así como material adicional como guía para el docente.

Nivel elemental

La leyenda de Josefo puede representarse con el grupo de alumnos formando un círculo con diferente número de personas y realizando el proceso de eliminación descrito en la sección 1. En una primera fase, el docente coloca 2, 4 y 8 alumnos y, después de numerarlos y realizar el proceso de eliminación, pide que anoten el lugar de la última persona eliminada. A continuación, coloca 16 alumnos y pide que conjeturen el lugar que ocupará la última persona eliminada. Si los alumnos han observado que el número de personas es potencia de dos, llegarán fácilmente a la fórmula 5.

La fórmula 7 también es muy fácil de deducir por los alumnos recreando la historia con 3, 7 y 15 personas.

Una sencilla introducción a la aritmética modular consiste en repetir los experimentos anteriores empezando a contar desde una persona distinta y observando cómo ha cambiado el resultado final.

Nivel intermedio

La fórmula 6 permite introducir el sistema de numeración binario para resolver el problema de Josefo. Con ayuda de la baraja o de algún programa interactivo (WEB4), el docente propone en primer lugar algunos ejemplos ofreciendo el método de solución (pasar al sistema binario el número dado, pasar la primera cifra a la última posición y volver a convertir el resultado al sistema decimal) y, a continuación, pide a los alumnos que realicen la operación por sí mismos con otros valores.

Otra actividad interesante consiste en pedir a algún alumno que prepare alguno de los juegos de magia que aquí se describen, o busque alguno similar en las referencias citadas, y lo realice ante el resto. Después pueden discutir entre todos el método utilizado y las propiedades aplicadas.

Nivel superior

El problema de Josefo es una excelente motivación para introducir la noción de recurrencia. Una vez asimiladas las fórmulas de recurrencia que aquí se han mostrado, sería interesante pedir a los alumnos que diseñen otros experimentos o planteen problemas que puedan estudiarse mediante procesos recursivos. Como ejemplos sencillos, pueden sugerirse el de la sucesión de Fibonacci, el problema de las torres de Hanoi o el de la formación del triángulo de Sierpinski.

De forma paralela, sería interesante destacar los inconvenientes de realizar conjeturas sobre problemas generales a partir de situaciones particulares. A partir de algunos ejemplos clásicos, como el polinomio de Euler $p(n)=n^2+n+41$ cuyos primeros valores son números primos o el problema de Leo Moser para determinar el número máximo de regiones que se forman en un círculo cuando se unen n puntos de su frontera (la fórmula $R(n)=2n-1$ sólo es válida hasta n = 5), se debe enfatizar la importancia de una demostración rigurosa para validar una fórmula de recurrencia obtenida a partir de algunos casos.

Otras aplicaciones

Ya hemos visto que el problema de Josefo se puede plantear como recreación matemática, ha dado lugar a una mezcla de cartas con propiedades particulares, es posible realizar juegos de magia basados en dichas propiedades y puede generalizarse a situaciones más complejas de gran contenido matemático. Pero tiene otras aplicaciones insospechadas. En la Real Basílica Santuario de la Vera Cruz de Caravaca (Murcia) se encuentra la llamada "Ventana de la Aparición" (figura 2) un lucernario gótico de 75 centímetros de diámetro que contiene a su alrededor 42 signos cuya interpretación ha escapado durante largo tiempo a los historiadores. Sin embargo, Pablo Alonso, especialista en Historia Medieval, ha logrado la traducción

Figura 2. Ventana de la Aparición de la Basílica Santuario de la Vera Cruz (Caravaca de la Cruz, Murcia); imagen procedente de WEB5.

completa de dichos signos aplicando el esquema sugerido por el problema de Josefo, es decir, deshaciendo la mezcla australiana que se realizó con los signos (WEB5).

Referencias

Ahrens W. (1901) *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.* Leipzig. Teubner.

Alegría P. (2008) *Magia por principios*. Sevilla. Publidisa.

Cardano G. (1539) *Practica Arithmeticae Generalis*.

Euler L. (1776) Observationes circa novum et singulare progressionum genus. *Opera Omnia*: Ser. 1, Vol. 7, 246–261.

Gardner M. (1969) *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*. New York. Simon and Schuster.

Graham R., Knuth D., Patashnik O. (1989) *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Reading, MA. Addison-Wesley.

Hopkins B., ed. (2009) *Resources for Teaching Discrete Mathematics*. Washington. Mathematical Association of America.

Kraitchik M. (1942) *Mathematical Recreations*. New York. Norton.

Ledet A. (2006) The Monge Shuffle for two-power decks. *Mathematica Scandinavica* 98, 5-11.

Monge G. (1773) Réflexions sur un tour de cartes. *Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savants.* Paris. pp.390-412.

Mulcahy C. (2005) *The Down Under deal, Card Colm. MAA.*

Murphy G. (1942) The puzzle of the thirty counters. *Béaloideas: The Journal of the Folklore of Ireland Society* 12, 3-28.

Odlyzko A., Wilf H. (1991) Functional iteration and the Josephus problem. *Glasgow Mathematical Journal* 33, 235-240.

Tahan M. (1975) *El hombre que calculaba*. Barcelona. Aedo.

Tait P. G. (1900) On the generalization of the Josephus problem, *Collected Scientific Papers* Vol. 2. Cambridge. pp.432-435.

Thériault N. (2000) Generalizations of the Josephus problem, *Utilitas Mathematica* 58, 161-173.

WEB1 (Math Forum) http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1185904&tstart=0

WEB2 (Cut-the-knot) Alex Bogomolny, http://www.cut-the-knot.org/recurrence/flavius.shtml

WEB3 (Delphy for fun) Gary Darby, http://www.delphiforfun.org/Programs/Josephus.htm

WEB4 (Discrete Math Resources) Doug Ensley, http://webspace.ship.edu/deensley/flash/JosephusProblem.html

WEB5 (La Verdad de Murcia) La ventana de la aparición desvela su mensaje, http://www.laverdad.es/murcia/v/20110711/comarcas/ventana-aparicion-desvela-mensaje-20110711.html